Die Vielteilchen-T-Matrix und ihre Anwendung in der Theorie realer Gase von mittlerer Dichte

K. BAERWINKEL

II. Anwendung der Transportgleichung

Institut für Theoretische Physik der Universität Marburg

(Z. Naturforsch. **24 a**, 38—51 [1969]; eingegangen am 16. Juli 1968)

The improved Landau equation governing nonequilibrium behaviour of quantum gases of moderate density is shown to yield the exact second virial coefficient $B(T)$. After simplifying the collisional operator the linearized stress tensor is evaluated to give the lowest order virial correction to the shear viscosity.

1. Erhaltungssätze

1.1 *Teilchenzahl-Erhaltungssatz*

Bei der Auswertung unserer Hauptgleichung, der grundlegenden Transportgleichung (107)[1], werden wir zunächst auf die Erhaltungssätze für die Teilchenzahl und für den Impuls näher eingehen. Zuerst betrachten wir den Teilchenzahl-Erhaltungssatz. Die dabei notwendigen Rechnungen sind auch für spätere Überlegungen nützlich. Integration der Hauptgleichung über den Impuls ergibt

$$\dot{n}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{j=1}^{4} \int K_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} - \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, (\nabla_p\, \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_r - \nabla_{\boldsymbol{r}}\, \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_p)\, f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,. \tag{1}$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, daß die vier Terme K_j keinen Beitrag liefern. Bei K_1, wie es durch (108)[1] gegeben ist, integrieren wir statt über $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ über den Schwerpunktsimpuls $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'$ und den Relativimpuls $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$:

$$\int K_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2m} \cdot \nabla_r + \partial_t\right) I_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t)\,, \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t) = {} & \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \\ & \cdot \Big\{ \mathrm{Re}\, \langle \boldsymbol{k} | T'_{\pm}(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle - \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\, |\langle \boldsymbol{q} | T_{\pm}(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle|^2 \\ & - \pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_k - E_q)\, \mathrm{Im}\, [\langle \boldsymbol{q} | T_{\pm}(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \langle \boldsymbol{q} | T'_{\pm}(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle] \Big\}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (96)[1] ist
$$I_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t) = 0\,. \tag{4}$$

Nun zu K_2. Nach (109)[1] gilt

$$\int K_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\, \{\cdots\} = 0\,, \tag{5}$$

weil hier $\{\ldots\}$ bezüglich $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p}'$ symmetrisch ist.

Bei K_3 [vgl. (110)[1]] wird wieder über den zu $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ gehörenden Relativ- und Schwerpunktsimpuls integriert:

$$\int K_3(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{\pi}{2} (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, I_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t) \tag{6}$$

[1] K. BAERWINKEL, Z. Naturforsch. **24a**, 22 [1969]; voranstehende Arbeit.

mit

$$I_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \left\{ f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \nabla_{\boldsymbol{r}} f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) - f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \nabla_{\boldsymbol{r}} f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \right\}$$
$$\cdot \operatorname{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_q - E_k) \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle^* \nabla_k \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle. \tag{7}$$

Für das letzte Integral über $\boldsymbol{q}$ können wir schreiben

$$\nabla_k \operatorname{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_q - E_{k'}) \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_q - i\,O) | \boldsymbol{k}' \rangle |_{\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}}$$
$$= \nabla_k \operatorname{Im} \left\{ \frac{i}{\pi} \left(\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_{k'} + i\,O) | \boldsymbol{k}' \rangle - \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_{k'} - i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle \right) \right\} \Big|_{\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}}$$
$$= \frac{1}{\pi} \nabla_k \operatorname{Re} \left(\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_{k'} + i\,O) | \boldsymbol{k}' \rangle - \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_{k'} + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \right) |_{\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}}.$$

Hier haben wir die Unitaritätsrelation für die T-Matrix verwendet. Im letzten Ausdruck kann man nun auf die Bildung des konjugiert Komplexen verzichten, weil nur der Realteil zurückbehalten wird. Mit der vorausgesetzten Symmetrie der T-Matrix folgt dann

$$\operatorname{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_q - E_k) \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle^* \nabla_k \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle = 0. \tag{8}$$

Bleibt also noch [vgl. (111)[1]]

$$\int K_4(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{\pi}{2} (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \nabla_r \left\{ f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \right\}$$
$$\cdot \operatorname{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_k - E_q) \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \nabla_q \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle \tag{9}$$
$$- \pi (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t\right) \nabla_r f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t\right)$$
$$\cdot \operatorname{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta(E_k - E_q) \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \nabla_q \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle.$$

Der zweite Summand verschwindet wegen (8). Im ersten beachten wir, daß wegen

$$\langle \boldsymbol{p} | T_\pm(z) | \boldsymbol{p}' \rangle = \pm \langle -\boldsymbol{p} | T_\pm(z) | \boldsymbol{p}' \rangle$$

die Größe

$$\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \nabla_q \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle$$

eine ungerade Funktion von $\boldsymbol{q}$ ist und daher

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_k - E_q) \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \nabla_q \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle = 0. \tag{10}$$

Auf der rechten Seite von (1) ist jetzt nur der Landau-Term übriggeblieben. Wenn man (13)[1], (14)[1] benutzt, nämlich

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = \frac{p^2}{2m} + \int F\left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

mit $F(\boldsymbol{k}) = F(-\boldsymbol{k})$, kann man durch partielle Integration

$$-\int \mathrm{d}\boldsymbol{p} (\nabla_p \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_r - \nabla_r \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_p) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = -\nabla_r \cdot \int (\boldsymbol{p}/m) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{11}$$

zeigen. Insgesamt erhalten wir damit die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{n}(\boldsymbol{r}, t) + \operatorname{div}(n(\boldsymbol{r}, t) \langle \boldsymbol{p}/m \rangle) = 0; \; \langle \boldsymbol{p}/m \rangle = \frac{1}{n(\boldsymbol{r}, t)} \int (\boldsymbol{p}/m) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}. \tag{12}$$

1.2. *Impulssatz und Drucktensor*

Jetzt soll — wie schon in der Einführung zu [1] angegeben — aus der Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte

$$\partial_t \int p_\nu f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{13}$$

der Drucktensor $\Pi_{\nu\mu}$ entnommen werden. Bekanntlich ist

$$\int p_\nu J(\text{Boltzmann})\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0,$$

und wir haben daher aufgrund unserer Hauptgleichung (107)[1] zu schreiben

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}(\boldsymbol{r}, t) = \int p_\nu [\nabla_{\boldsymbol{p}} \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} - \nabla_{\boldsymbol{r}} \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}}] f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} - \sum_{j=1}^{4} \int p_\nu K_j(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}, \tag{14}$$

d.h. die rechte Seite ist so umzuarbeiten, daß sie die Gestalt der linken Seite annimmt. Den Drucktensor spalten wir dieser Gleichung entsprechend auf:

$$\Pi_{\nu\mu} = \Pi_{\nu\mu}(\text{Landau}) + \sum_{j=1}^{4} \Pi_{\nu\mu}^{(j)}, \tag{15}$$

wobei also $\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}(\text{Landau})$ dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite von (14) entspricht. Partielle Integration ohne Randterme ergibt dort

$$- \int p_\nu \nabla_{\boldsymbol{r}} \varepsilon \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int p_\nu (\nabla_{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} \varepsilon) f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int (\partial_{x_\nu} \varepsilon) f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = - \int p_\nu \nabla_{\boldsymbol{p}} \varepsilon \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$$
$$+ \partial_{x_\mu} \int p_\nu (\partial_{p_\mu} \varepsilon) f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \partial_{x_\nu} \int \varepsilon f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} - \int \varepsilon \, \partial_{x_\nu} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

Durch Einsetzen von ε wie oben $[F(\boldsymbol{k}) = F(-\boldsymbol{k})!]$ erhalten wir

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}(\text{Landau}) = \partial_{x_\mu} \int \frac{p_\nu p_\mu}{m} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \partial_{x_\mu} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, p_\nu \left(\partial_{p_\mu} F\left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\right)\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \partial_{x_\nu} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, F\left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t).$$

Hier integrieren wir im zweiten Summanden noch einmal partiell und schreiben dann endgültig

$$\Pi_{\nu\mu}(\text{Landau}) = \int \frac{p_\nu p_\mu}{m} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{16}$$
$$- \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \left[\int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, F\left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) \right] p_\nu \, \partial_{p_\mu} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - \tfrac{1}{2} \delta_{\nu\mu} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, F\left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t).$$

Dies ist natürlich genau der Drucktensor, den GROSSMANN[2] mit Hilfe der Landau-Gleichung erhalten hat.

Nun zu dem über die Landau-Theorie hinausgehenden Anteil des Drucktensors.

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}^{(1)} = - \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \, p_\nu K_1 = - (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \, \frac{Q_\nu}{2} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t \right) I_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t).$$

Nach Einsetzen von K_1 nach (108)[1] konnten wir zunächst p_ν durch $\frac{1}{2}(p_\nu + p_\nu')$ ersetzen, weil der übrige Integrand in $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ symmetrisch ist. Danach rechnet man wie bei Gl. (2) und wegen (4) kann gesetzt werden:

$$\Pi_{\nu\mu}^{(1)} = 0. \tag{17}$$

Der nächste Term ist

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}^{(2)} = - \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \, p_\nu K_2.$$

Hier folgt nun [vgl. (109)[1] und (5)]

$$\Pi_{\nu\mu}^{(2)} = (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \, f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right)$$
$$\cdot \left[\frac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, \frac{q_\nu q_\mu}{m} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle|^2 - \frac{k_\nu k_\mu}{m} \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{k} | T_\pm'(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle \right]. \tag{18}$$

Weiterhin erhalten wir mit (110)[1] und (7)

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}^{(3)} = - \frac{\pi}{4} (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \, Q_\nu I_3(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}; t).$$

Unter Berücksichtigung von (8) können wir dann

$$\Pi_{\nu\mu}^{(3)} = 0 \tag{19}$$

setzen. Beim letzten Anteil des Drucktensors bekommen wir [vgl. (111)[1] und (9)], wenn wir (8) benutzen:

$$\partial_{x_\mu} \Pi_{\nu\mu}^{(4)} = - \frac{\pi}{2} (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \, \mathrm{d}\boldsymbol{q} \, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \left(\frac{Q_\nu}{2} + q_\nu \right) \nabla_{\boldsymbol{r}} \left[f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \right]$$
$$\cdot \delta(E_k - E_q) \operatorname{Im} [\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \nabla_q \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle].$$

[2] S. GROSSMANN, Z. Phys. **182**, 24 [1964].

Wegen (10) fällt auch noch der Summand mit $\frac{1}{2} Q_\nu$ weg und nur der mit q_ν bleibt übrig, so daß

$$\Pi^{(4)}_{\nu\mu} = -\frac{\pi}{2}(2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, q_\nu f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \cdot \delta(E_k - E_q)\, \mathrm{Im}\,[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \,\partial_{q_\mu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle]\,. \tag{20}$$

2. Der zweite Virialkoeffizient $B(T)$

Nachdem uns nun der Drucktensor als Funktional der Verteilungsfunktion f bekannt ist, können wir zum Gleichgewicht übergehen. Für diesen Spezialfall wollen wir $\Pi_{\nu\mu}$ in zweiter Ordnung in der Dichte n berechnen. [Mehr würde ja auch über den Rahmen der Dichtenäherung, die schon in unserer Hauptgleichung (107)[1] steckt, hinausgehen.] Den Übergang zum Gleichgewicht und die Entwicklung bis zu Termen $\sim n^2$ wollen wir kurz durch $''\!\rightarrow\!''$ andeuten.

Im Gleichgewicht ist f in niedrigster Ordnung bezüglich n natürlich — nämlich nach (40)[1], (43)[1] — gerade die Maxwell-Verteilung. Für das zuletzt angegebene $\Pi^{(4)}_{\nu\mu}$ folgt damit

$$\Pi^{(4)}_{\nu\mu}\, ''\!\rightarrow\!''\, -n^2 (2\pi m \varkappa T)^{-3} \cdot \frac{\pi}{2}(2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, e^{-\beta(Q^2/4m)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, q_\nu e^{-\beta E_q} \cdot \mathrm{Im} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta(E_k - E_q) \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \,\partial_{q_\mu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle\,.$$

Hier ist wieder (8) anwendbar. Also

$$\Pi^{(4)}_{\nu\mu}\, ''\!\rightarrow\!''\, 0\,. \tag{21}$$

Jetzt brauchen wir nur noch $\Pi_{\nu\mu}(\text{Landau}) + \Pi^{(2)}_{\nu\mu}$ auszuwerten. Für den ersten Anteil von $\Pi_{\nu\mu}(\text{Landau})$ nach (16) gilt

$$\int \frac{p_\nu p_\mu}{m} f\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, ''\!\rightarrow\!''\, n(2\pi m\varkappa T)^{-3/2} \int \frac{p_\nu p_\mu}{m} e^{-\beta p^2/2m} \mathrm{d}\boldsymbol{p} + R = \delta_{\nu\mu} n \varkappa T + R\,. \tag{22}$$

Damit haben wir den Druck des klassischen idealen Gases abgespalten und der Rest R ist mit Hilfe der Formeln (40)[1], (41)[1], (42)[1] auszudrücken:

$$R = n^2(\mp\lambda^3)(2\pi m\varkappa T)^{-3/2} \int \frac{p_\mu\, p_\nu}{m} [2^{-3/2} e^{-\beta(p^2/2m)} - e^{-\beta(p^2/m)}]\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + n^2 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, e^{-\beta E} \alpha(p, E) \left[\frac{p_\nu p_\mu}{m} - \delta_{\nu\mu}\varkappa T\right]. \tag{23}$$

Man verifiziert leicht, daß hier der erste Summand der mit $n^2 \varkappa T \cdot \delta_{\nu\mu}$ multiplizierte Virialkoeffizient B_0 des idealen Quantengases ist [vgl. (9)[1]]. Im zweiten Summanden wird α gemäß (92)[1] explizit eingesetzt

$$\begin{aligned} R = {} & \delta_{\nu\mu} n^2 \varkappa T B_0(T) + \delta_{\nu\mu} n^2 \sqrt{2}\,\lambda^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle \\ & - n^2 2^{3/2} \lambda^3 \beta \int \mathrm{d}k\, e^{-\beta E_k} \frac{k_\nu k_\mu}{m} \mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle - \delta_{\nu\mu} n^2 \sqrt{2}\,\lambda^3 \varkappa T \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \\ & \cdot \left[\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle - \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \frac{\mathscr{P}}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2\right] - n^2 2^{3/2} \lambda^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \\ & \cdot \left[\tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \frac{q_\nu q_\mu}{m} \frac{\mathscr{P}}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 - \frac{k_\nu k_\mu}{m} \mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Offensichtlich fällt der letzte Term gegen den Beitrag von $\Pi^{(2)}_{\nu\mu}$ weg und der vorletzte ergibt wegen (96)[1] gerade $\delta_{\nu\mu} n^2 \varkappa T B_2$, wobei B_2 der durch (8)[1] definierte Beitrag zum Virialkoeffizienten B ist. Bis jetzt haben wir also folgendes Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} \Pi^{(4)}_{\nu\mu} + \Pi^{(2)}_{\nu\mu} + \int \frac{p_\nu p_\mu}{m} f\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, ''\!\rightarrow\!''\, & n \varkappa T(1 + n[B_0(T) + B_1(T) + B_2(T)]) \\ & - n^2 2^{3/2} \lambda^3 \beta \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \frac{k_\nu k_\mu}{m} \mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Hierbei haben wir auch noch die definierende Gl. (5)[1] für B_1 benutzt. Jetzt der restliche Anteil von $\Pi_{\nu\mu}(\text{Landau})$ nach (16):

$$-\tfrac{1}{2}\delta_{\nu\mu} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, ''\!\rightarrow\!''\, -\delta_{\nu\mu} n^2 \varkappa T B_1(T) \tag{26}$$

und
$$- \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}\right) f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r};t)\,p_\nu\,\partial_{p_\mu} f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) \text{ ''}\!\to\!\text{'' } n^2\,2^{3/2}\,\lambda^3\,\beta \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}\,\frac{k_\nu k_\mu}{m}$$
$$\cdot \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle + \delta_{\nu\mu}\,n^2\,\varkappa\,T\,B_1(T)\,. \tag{27}$$

Unser Gesamtresultat lautet damit: Im Gleichgewicht gilt bis zur zweiten Potenz in der Dichte
$$\Pi_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu}\,n\,\varkappa\,T\,(1 + n\,B(T))\,, \tag{28}$$
wobei $B = B_0 + B_1 + B_2$ der aus der Gleichgewichtstheorie [3] bereits bekannte exakte Virialkoeffizient ist; ein Ergebnis also, das nicht mehr zu verbessern ist.

3. Lokales Gleichgewicht, angenäherte Lösung der Hauptgleichung

Wir betrachten noch einmal die Einteilchenfunktion $g^<$ im totalen Gleichgewicht (vgl. [1]) und schreiben dafür $g^<_{\text{eq.}}(\boldsymbol{p}E;\beta,\mu)$. Im lokalen Gleichgewicht hat dann $g^<$ nach [4] die Gestalt
$$g^<_{\text{l. eq.}}(\boldsymbol{p}E,\boldsymbol{r}t) = g^<_{\text{eq.}}(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u}, E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u} + \frac{m}{2}u^2; \beta(\boldsymbol{r},t), \mu(\boldsymbol{r},t))\,, \tag{29}$$
wobei $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ die lokale mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Für die Fermi- bzw. Bose-Verteilung mit $\mu = \mu(\boldsymbol{r},t)$ gilt wieder die für das Gleichgewicht bekannte Dichteentwicklung (38) [1], jetzt lediglich mit $n = n(\boldsymbol{r},t)$. Aus (29) erhalten wir durch Integration über E die Wigner-Funktion für das lokale Gleichgewicht. Die Dichteentwicklung dafür sieht nun — mit $n = n(\boldsymbol{r},t)$, $\beta^{-1} = \varkappa\,T(\boldsymbol{r},t)$ — fast so aus, wie im totalen Gleichgewicht [vgl. (43) [1]]:
$$f_{\text{l. eq.}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = n\,F_0(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) + n^2[F_{\text{id}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) + F_{\text{int}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)] + O(n^3) \tag{30}$$
mit $F_0(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = (2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\,e^{-(\beta/2m)(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2}$,
$$F_{\text{id}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = \mp\,(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\,\lambda^3(\boldsymbol{r},t)\left(2^{-3/2}\exp\left\{-\frac{\beta}{2m}(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2\right\} - \exp\left\{-\frac{\beta}{m}(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u})^2\right\}\right), \tag{31}$$
$$F_{\text{int}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = (2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\left[\int \mathrm{d}E\,e^{-\beta E}\alpha(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u},E) - F_0(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}E'\,e^{-\beta E'}\alpha(\boldsymbol{p}',E')\right]. \tag{32}$$

Wir stellen uns nun vor, unser physikalisches System befinde sich nahezu im lokalen Gleichgewicht, und ändern die Hauptgleichung (107) [1] ab, indem wir für den Stoßterm einen vereinfachenden Ansatz machen:
$$(\partial_t + \nabla_p\,\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_r - \nabla_r\,\varepsilon(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\cdot\nabla_p)\,f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) - \sum_{j=1}^{4} K_j = -\frac{1}{\tau}(f - f_{\text{l. eq.}})\,. \tag{33}$$

Der ursprüngliche Stoßterm darf hier durchaus komplizierter als das Boltzmannsche Stoßintegral sein. Die Relaxationszeit $\tau = \tau(\boldsymbol{r},t)$ ist natürlich je nach Art des ursprünglichen Stoßterms zu wählen. Wir werden vor allem ihre Dichteabhängigkeit noch genauer diskutieren (Abschnitt 5). Wegen
$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,f_{\text{l. eq.}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = n(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)$$
bzw. — mit $f_1 = f - f_{\text{l. eq.}}$ —
$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,f_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = 0 \tag{34}$$
folgt aus (33) auch wiederum die alte Kontinuitätsgleichung (12). Unter der Voraussetzung $f_1 \ll f_{\text{l. eq.}}$ wird nun
$$f_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t) = -\,\tau(\partial_t + \nabla_p\,\varepsilon_{\text{l. eq.}}\cdot\nabla_r - \nabla_r\,\varepsilon_{\text{l. eq.}}\cdot\nabla_p)\,f_{\text{l. eq.}} + \tau\sum_{j=1}^{4} K_{j,\text{l. eq.}} \tag{35}$$
gesetzt und damit die Hauptgleichung bzw. (33) näherungsweise gelöst. Hieraus erhält man mit dem Impulssatz (13)
$$\int \frac{\boldsymbol{p}}{m}\,f_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0\,. \tag{36}$$

[3] B. J. BAUMGARTL, Z. Phys. **198**, 148 [1967].

[4] L. P. KADANOFF u. G. BAYM, Quantum Statistical Mechanics, W. A. Benjamin Inc., New York 1962.

Die in der Kontinuitätsgleichung (12) vorkommende mittlere Geschwindigkeit $\langle \boldsymbol{p}/m \rangle$ ist jetzt mit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ identisch. Mit $P_{\nu\mu}$ bezeichnen wir im folgenden die bezüglich f_1 linearisierte Abweichung des Drucktensors von seinem Wert im lokalen Gleichgewicht. Für $\nu \neq \mu$ gilt dann (vgl. (16), (18), (20)):

$$\begin{aligned}
P_{\nu\mu} = & \frac{1}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu) f_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\
& - \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right) p_\nu [f_{1.\,\mathrm{eq.}}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r}; t)\, \partial_{p_\mu} f_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) + f_1(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r}; t)\, \partial_{p_\mu} f_{1.\,\mathrm{eq.}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)] \\
& + 2(2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f_{1.\,\mathrm{eq.}}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f_1\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \\
& \cdot \left[\frac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \frac{q_\nu q_\mu}{m} \frac{\mathscr{P}}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle|^2 - \frac{k_\nu k_\mu}{m} \mathrm{Re}\, \langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle\right] \qquad (37) \\
& - \pi (2\pi\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, f_{1.\,\mathrm{eq.}}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) f_1\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}; t\right) \\
& \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_k - E_q)\, \mathrm{Im}\, [\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle^* \, \partial_{q_\mu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle].
\end{aligned}$$

4. Die Zähigkeit: Strömungskorrektur

$P_{\nu\mu}(\nu \neq \mu)$ wird nun bis zur zweiten Ordnung in $n(\boldsymbol{r}, t)$ ausgerechnet, wobei die Dichteabhängigkeit von τ zunächst noch außer acht gelassen wird, und dann auf die Form

$$P_{\nu\mu} = -\eta \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial x_\mu}{\partial u_\nu}\right) \qquad (38)$$

gebracht. η ist dann als Zähigkeit zu interpretieren. Nach (30), (37) entsteht offensichtlich nur ein Term $\sim n$, nämlich

$$P^{(0)}_{\nu\mu} = -\frac{\tau}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu) \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t\right) n\, F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

Der Anteil mit der zeitlichen Ableitung ergibt keinen Beitrag; denn

$$\begin{aligned}
\int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu)\, \partial_t n\, F_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} = {} & \partial_t n \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu)\, F_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\
& + n m \dot{u}_\nu \int (p_\mu - m u_\mu) F_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} + n m \dot{u}_\mu \int (p_\nu - m u_\nu) F_0\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}.
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Summanden verschwinden hier, weil F_0 nur von $|\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}|$ abhängt, und der erste verschwindet ebenfalls, wenn man noch $\nu \neq \mu$ beachtet. Entsprechend folgert man

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu)\, \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} n F_0\right) \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\
& = -\frac{n}{m^2} \int F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{u}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} [(p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu)]\, \mathrm{d}\boldsymbol{p} \\
& = +n \cdot \frac{2}{3} \left[\int F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \frac{(\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{u})^2}{2m} \mathrm{d}\boldsymbol{p}\right] \left[\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right].
\end{aligned}$$

Der Wert des verbleibenden Integrals ist $\frac{3}{2} \varkappa T$, so daß

$$P^{(0)}_{\nu\mu} = -\tau n \varkappa T \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right). \qquad (39)$$

Die Zähigkeit $\tau n \varkappa T$ erhält man bekanntlich auch bei der Behandlung der klassischen Boltzmann-Gleichung mit Relaxationsansatz. Unter Berücksichtigung der Beiträge $\sim n^2$ werden wir $P_{\nu\mu}$ so darstellen:

$$P_{\nu\mu} = -\tau n \varkappa T (1 + n \Delta_{\mathrm{S}}) \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right). \qquad (40)$$

Die Strömungskorrektur $\Delta_{\mathrm{S}}^{\mathrm{id}}$ für ideale Quantengase folgt nun aus

$$P^{\mathrm{id}}_{\nu\mu} = -\frac{\tau}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu) \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t\right) n^2 F_{\mathrm{id}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

F_{id} ist explizit durch (31) gegeben und wir können nun genau so wie bei F_0 argumentieren:

$$P_{\nu\mu}^{\text{id}} = -\tau n^2 \cdot \frac{2}{3} \left[\int F_{\text{id}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \frac{(p - m\boldsymbol{u})^2}{2m} \mathrm{d}\boldsymbol{p} \right] \left[\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right].$$

Nach Auswertung des Integrals haben wir dann als ersten Anteil von Δ_s:

$$\Delta_{\text{S}}^{\text{id}} = \mp 2^{-5/2} \lambda^3 = B_0(T). \tag{41}$$

In dem Anteil

$$-\frac{\tau}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu) \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_r + \partial_t \right) f_{1.\,\text{eq.}} \mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

von $P_{\nu\mu}$ haben wir bis jetzt $n F_0 + n^2 F_{\text{id}}$ für $f_{1.\,\text{eq.}}$ eingesetzt. Es fehlt noch $n^2 F_{\text{int}}$. Mit (32), (92)[1] und (97)[1] erhält man

$$F_{\text{int}} = F_\delta + F_{\mathscr{P}}, \tag{42}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_\delta(\boldsymbol{p}, r; t) = {} & 2 B_1(T) F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \\ & - (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}' \left[\beta \lambda^3 \exp\left\{ -\beta E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} \right\} \operatorname{Re} \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_\pm(E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} + iO) \left| \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right\rangle \right] \\ & \cdot \exp\left\{ -\frac{\beta}{m} \left(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2} - m\boldsymbol{u} \right)^2 \right\} \end{aligned} \tag{43}$$

und

$$\begin{aligned} F_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) = {} & 2 B_2(T) F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - \lambda^3 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \\ & \cdot \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}' \mathrm{d}\boldsymbol{k} \left(e^{-\beta E_k} - \exp\left\{ -\beta E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} \right\} \right) \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}} \\ & \cdot \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2} \right| T_\pm(E_k + iO) \left| \boldsymbol{k} \right\rangle \right|^2 \exp\left\{ -\frac{\beta}{m} \left(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2} - m\boldsymbol{u} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{44}$$

F_δ ist dabei derjenige Teil von F_{int}, den man erhält, wenn die Spektralfunktion a als $\delta(E - \varepsilon)$ angesetzt und unter Beachtung der Normierung entwickelt wird. Diese Näherung entspricht gerade der einfachen Landau-Gleichung. Es wird uns daher möglich sein, die Terme, die zu den Ergebnissen von Grossmann[5] führen müssen, zu sammeln. Bei F_δ bekommen wir nun

$$\begin{aligned} P_{\nu\mu}^\delta = {} & -\frac{\tau}{m} \int (p_\nu - m u_\nu)(p_\mu - m u_\mu) \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_r + \partial_t \right) F_\delta(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) \mathrm{d}\boldsymbol{p} = -\tau n \varkappa T \cdot 2 n B_1(T) \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right) \\ & + \tau n^2 \cdot \tfrac{2}{3} \beta \lambda^3 \cdot \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \exp\left\{ -\beta \frac{Q^2}{4m} \right\} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \frac{1}{m} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k} \right)^2 e^{-\beta E_k} \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + iO) | \boldsymbol{k} \rangle \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right). \end{aligned}$$

Hier haben wir wie bei der Berechnung von $P_{\nu\mu}^{(0)}$ geschlossen und dabei benutzt, daß der zweite Summand von F_δ nur von $|\boldsymbol{p} - m\boldsymbol{u}|$ abhängt. Dies ist leicht zu sehen, wenn man voraussetzt, $\langle \boldsymbol{k} | T_\pm(z) | \boldsymbol{k} \rangle$ sei nur von $|\boldsymbol{k}|$ abhängig. Bei einer rotationssymmetrischen Wechselwirkung w ist die Voraussetzung gegeben.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns für den Rest dieser Arbeit auf rotationsinvariante Wechselwirkungen.

Das in $P_{\nu\mu}^\delta$ noch vorkommende Integral wird jetzt ausgeführt und es ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{\nu\mu}^\delta &= -\tau n \varkappa T \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right) \cdot n \Delta_{\text{S}}^\delta, \\ \Delta_{\text{S}}^\delta &= \sqrt{2} \lambda^3 \beta \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{k} | T_\pm(E_k + iO) | \boldsymbol{k} \rangle (1 - \tfrac{2}{3} \beta E_k). \end{aligned} \tag{45}$$

Für das analog zu $P_{\nu\mu}^\delta$ definierte $P_{\nu\mu}^{\mathscr{P}}$ folgt zunächst

$$P_{\nu\mu}^{\mathscr{P}} = -\tau n \varkappa T \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right) \cdot n \Delta_{\text{S}}^{\mathscr{P}}$$

[5] S. Grossmann, Z. Naturforsch. **20a**, 861 [1965].

mit

$$\Delta_S^{\mathscr{P}} = 2\,B_2(T) - \sqrt{2}\,\lambda^3 \cdot \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,(e^{-\beta E_k} - e^{-\beta E_q})\, \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\, |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2$$
$$- \frac{2^{3/2}}{3}\,\beta\,\lambda^3 \cdot \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,E_q (e^{-\beta E_k} - e^{-\beta E_q})\, \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\, |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 .$$

Mit Hilfe von (88)[1], (96)[1] überzeugt man sich davon, daß der zweite Summand auf der rechten Seite mit $B_2(T)$ identisch ist. Daher dann

$$\Delta_S^{\mathscr{P}} = B_2(T) - \frac{\sqrt{2}}{3}\,\beta\,\lambda^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,E_q (e^{-\beta E_k} - e^{-\beta E_q})\, \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\, |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 . \tag{46}$$

Bei der Auswertung von $P_{\nu\mu}((37))$ haben wir bis jetzt den ersten Summanden mit

$$f_1 = -\,\tau(\boldsymbol{p}/m \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t) f_{1.\,\mathrm{eq.}}$$

bearbeitet. Für f_1 setzen wir nun den nächsten Term nach (35) ein, nämlich in niedrigster Dichtenäherung

$$\left[\nabla_{\boldsymbol{p}} \int F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}\right) n\,F_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\right] \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}\, n\,F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) - \left[\nabla_{\boldsymbol{r}} \int F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}}{2}\right) n\,F_0\,(\boldsymbol{q}, r\,; t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\right] \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}}\, n\,F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) .$$

Der Leser wird ohne Schwierigkeiten nachrechnen, daß dieser Ausdruck keinen Beitrag liefert. Zur vollständigen Auswertung von $\int (p_\nu - m u_\nu)\,(p_\mu - m u_\mu) f_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}$ müssen wir gemäß (35) für f_1 dann noch $\tau \Sigma K_j [n F_0]$ einsetzen. Beginnen wir mit K_4, das durch (111)[1] definiert ist:

$$P_{\nu\mu}^{K_4} = \frac{\tau}{m} \int (p_\nu - m\,u_\nu)\,(p_\mu - m\,u_\mu)\,K_4[n\,F_0]\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \frac{\tau}{m}\,\pi(2\,\pi\,\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,(p_\nu - m\,u_\nu)\,p_\mu - m\,u_\mu)$$
$$\cdot \left\{\frac{1}{2} \exp\left\{-\,\beta E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2}\right\} \nabla_{\boldsymbol{r}} \left(\frac{n^2}{(2\,\pi\,m\,\varkappa\,T)^3} \exp\left\{-\,\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}'}{2} - m\,\boldsymbol{u}\right)^2\right\}\right)\right.$$
$$\left. -\,n\,F_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t)\,\nabla_{\boldsymbol{r}}\, n\,F_0(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{r}; t)\right\} \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2})\,\mathrm{Im}\left[\left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\,\middle|\, T_\pm(E_k + i\,O)\,\middle|\,\boldsymbol{k}\right\rangle^*\right.$$
$$\left. \cdot \nabla_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} \left\langle\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\,\middle|\, T_\pm(E_k + i\,O)\,\middle|\,\boldsymbol{k}\right\rangle\right].$$

Hier ist (8) anwendbar. Also

$$P_{\nu\mu}^{K_4} = 0 .$$

Ebenso verschwindet auch $P_{\nu\mu}^{K_1}$. Es gilt nämlich [vgl. (108)[1]]

$$P_{\nu\mu}^{K_1} = \frac{\tau}{m}\,(2\,\pi\,\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} \left(\frac{Q_\nu}{2} - m\,u_\nu + q_\nu\right)\left(\frac{Q_\mu}{2} - m\,u_\mu + q_\mu\right)\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} + \partial_t\right)$$
$$\cdot\, n^2\,(2\,\pi\,m\,\varkappa\,T)^{-3} \exp\left\{-\,\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\,\boldsymbol{u}\right)^2\right\} \left\{e^{-\beta E_q}\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{q} | T'_\pm(E_q + i\,O\rangle | \boldsymbol{q}\rangle\right.$$
$$-\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k} \left[\frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\, |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2\right.$$
$$\left.\left. +\,\pi\,\delta(E_k - E_q)\,\mathrm{Im}\,(\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \langle \boldsymbol{q} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle)\right]\right\}.$$

Da der Inhalt der geschweiften Klammer nur von $|\boldsymbol{q}|$ abhängt (Voraussetzung der Rotationsinvarianz!), brauchen wir bei $(\frac{1}{2}\,Q_\nu - m u_\nu + q_\nu)\,(\frac{1}{2}\,Q_\mu - m u_\mu + q_\mu)$ nur den von $\boldsymbol{q}$ unabhängigen Anteil zu berücksichtigen, und dann folgt $P_{\nu\mu}^{K_1} = 0$ wegen (96)[1].

Nun der Beitrag von K_2:

$$P_{\nu\mu}^{K_2} = \frac{\tau}{m}\,(2\,\pi\,\hbar)^3 \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q} \left(\frac{Q_\mu}{2} - m\,u_\mu + q_\mu\right)\left(\frac{Q_\nu}{2} - m\,u_\nu + q_\nu\right) \frac{\boldsymbol{q}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}$$
$$\left\{\frac{n^2}{(2\,\pi\,m\,\varkappa\,T)^3} \exp\left\{-\,\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\,\boldsymbol{u}\right)^2\right\}\left[e^{-\beta E_q}\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{q} | T'_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{q}\rangle - \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\mathrm{e}^{-\beta E_k} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q}\right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot\, |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O\rangle | \boldsymbol{k}\rangle|^2\right]\right\}.$$

Wenn hier $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ vor dem ganzen Ausdruck stehen würde, wäre das Ergebnis Null; denn

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \left(\frac{Q_\mu}{2} - m\,u_\mu + q_\mu\right)\left(\frac{Q_\nu}{2} - m\,u_\nu + q_\nu\right) \exp\left\{-\,\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\,\boldsymbol{u}\right)^2\right\} = q_\nu\,q_\mu \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4\,m}$$

und das verbleibende Integral über $\boldsymbol{q}$ hätte einen ungeraden Integranden. Wir können also auch schreiben

$$P_{\nu\mu}^{K_2} = \tau n^2 \lambda^3 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, e^{-\beta(Q^2/4m)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \left[\left(\frac{Q_\mu}{2} + q_\mu\right) \nabla_{\boldsymbol{r}} u_\nu + \left(\frac{Q_\nu}{2} + q_\nu\right) \nabla_{\boldsymbol{r}} u_\mu\right]$$
$$\cdot \frac{\boldsymbol{q}}{m} \left\{e^{-\beta E_q} \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{q} | T'_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{q}\rangle - \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2\right\}.$$

Wenn wir wiederum ausnutzen, daß die geschweifte Klammer nur von $|\boldsymbol{q}|$ abhängt, erhalten wir für die zu $P_{\nu\mu}^{K_2}$ gehörende Strömungskorrektur:

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{K_2} = -\frac{2^{3/2}}{3} \lambda^3 \beta \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, E_q \left[e^{-\beta E_q} \operatorname{Re} \langle \boldsymbol{q} | T'_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{q}\rangle - \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2\right]. \tag{47}$$

Dies fällt gerade gegen den „unangenehmen" Anteil von $\Delta_{\mathrm{S}}^{\mathscr{P}}$ weg; denn für $\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{q} | T'_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{q}\rangle$ gilt die schon früher benutzte Darstellung als Hauptwertintegral. Also

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{\mathscr{P}} + \Delta_{\mathrm{S}}^{K_2} = B_2(T). \tag{48}$$

Von (110)[1] ausgehend, haben wir jetzt noch $P_{\nu\mu}^{K_3}$ zu diskutieren. Dabei können wir (8) anwenden und von der vorausgesetzten Rotationsinvarianz Gebrauch machen. Damit wird

$$P_{\nu\mu}^{K_3} = \tau n^2 \frac{\pi}{2} \lambda^3 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \exp\left\{-\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u}\right)^2\right\} e^{-\beta E_k} \frac{q_\nu q_\mu}{m} \delta(E_k - E_q)$$
$$\cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} \left[\frac{\beta}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}\right)^2 - \frac{\beta}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}\right)^2\right] \cdot \operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \nabla_k \langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle].$$

Hier ist

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} [\cdots] = -2 \nabla_{\boldsymbol{r}} \left[\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{k}\right]$$

und wenn $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ nur $\beta(\boldsymbol{r}, t)$ wirkt, verschwindet das Integral über $\boldsymbol{Q}$. Es ergibt sich also

$$P_{\nu\mu}^{K_3} = \tau n^2 2^{3/2} \lambda^3 \beta \pi \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\sigma} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \frac{q_\nu q_\mu}{m} k_\varrho e^{-\beta E_k}$$
$$\delta(E_k - E_q) \operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \partial_{k_\sigma} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle]. \tag{49}$$

Wegen

$$\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (z) | \boldsymbol{k}\rangle = T_\pm (z; q, k; \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{k}) \tag{50}$$

(Rotationsinvarianz!) gilt

$$\partial_{k_\sigma} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle = \left(\frac{k_\sigma}{k} \partial_x + q_\sigma \partial_y\right) T_\pm (E_q + i\,O; q, x; y)|_{x=k, y=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k}}, \tag{51}$$

so daß in (49)

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k} \cdots \sim (\delta_{\mu\varrho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\varrho})$$

wird. In den beiden verbleibenden Termen der Doppelsumme kann man noch den Integranden durch seinen von ν, μ unabhängigen Mittelwert $\langle \cdots \rangle_\omega$ über alle möglichen Orientierungen des Koordinatensystems ersetzen. Das Ergebnis für $P_{\nu\mu}^{K_3}$ lautet dann

$$P_{\nu\mu}^{K_3} = -\tau n \varkappa T \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right) \cdot n \Delta_{\mathrm{S}}^{K_3},$$

wobei

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{K_3} = -2^{3/2} \lambda^3 \beta^2 \pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \delta(E_k - E_q) \Big\langle \frac{q_\mu k_\mu}{m} \operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^*$$
$$\cdot q_\nu \partial_{k\nu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm (E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle]\Big\rangle_\omega. \tag{52}$$

Damit ist die Auswertung des ersten Anteils von $P_{\nu\mu}$, nämlich $1/m \int p_\nu\, p_\mu\, f_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}$ abgeschlossen. Obwohl der Rest komplizierter aussieht, ist er einfacher zu behandeln. Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (37) ergibt

$$P_{\nu\mu}^{(2)} = \tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,p_\nu F\left(\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'}{2}\right)\Big\{n\,F_0(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)\,\partial_{p_\mu}\left(\partial_t + \frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\right) n\,F_0(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)$$
$$+ \left(\left(\partial_t + \frac{\boldsymbol{p}'}{m}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\right) n\,F_0(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{r};t)\right)\partial_{p_\mu} n\,F_0(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};t)\Big\}.$$

Hiervon der Anteil mit der zeitlichen Ableitung nach partieller Integration bezüglich $p_\mu(\nu \neq \mu!)$:

$$-\tau\,\partial_t\, n^2 (2\pi m \varkappa T)^{-3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\left(\frac{Q_\nu}{2}+q_\nu\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{q_\mu}{q}\,F'(q)\exp\left\{-\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-m\boldsymbol{u}\right)^2\right\} e^{-\beta E_q}.$$

Das Integral über $\boldsymbol{q}$ verschwindet offensichtlich. Damit bleibt nur noch

$$P_{\nu\mu}^{(2)} = -\tau\,\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot n^2(2\pi m\varkappa T)^{-3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\frac{\boldsymbol{Q}}{2m}\left(\frac{Q_\nu}{2}+q_\nu\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{q_\mu}{q}\,F'(q)\exp\left\{-\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-m\boldsymbol{u}\right)^2\right\}e^{-\beta E_q}$$
$$-\tau n^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\left(\frac{Q_\nu}{2}+q_\nu\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{q_\mu}{q}\,F'(q)\,\frac{\boldsymbol{q}}{m}\cdot\Big\{F_0\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{r};t\right)\nabla_{\boldsymbol{r}}F_0\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{r};t\right)$$
$$-F_0\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{r};t\right)\nabla_{\boldsymbol{r}}F_0\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{r};t\right)\Big\}.$$

Der erste Summand ist natürlich wieder Null und im zweiten wird F_0 explizit eingesetzt. $\nabla_{\boldsymbol{r}}$ braucht dann nur auf die in F_0 vorkommende mittlere Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ angewendet zu werden. Daher

$$P_{\nu\mu}^{(2)} = -\tau n^2(2\pi m\varkappa T)^{-3}\beta\sum_{\varrho,\sigma}\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\sigma}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\exp\left\{-\frac{\beta}{m}\left(\frac{Q}{2}-m\boldsymbol{u}\right)^2\right\}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,e^{-\beta E_q}\frac{q_\mu}{q}\left(\frac{Q_\nu}{2}+q_\nu\right)\frac{q_\varrho q_\sigma}{m}F'(q).$$

Mit

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,e^{-\beta E_q}F'(q)\,\frac{q_\mu}{q}\left(\frac{Q_\nu}{2}+q_\nu\right)q_\varrho q_\sigma = (\delta_{\mu\varrho}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\varrho})\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,e^{-\beta E_q}(\partial_{q_\mu}F(q))\,q_\mu q_\nu^2$$

und nach partieller Integration bezüglich q_μ erhalten wir schließlich

$$P_{\nu\mu}^{(2)} = \tau n^2 2^{3/2}\lambda^3\beta(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,e^{-\beta E_q}\,\mathrm{Re}\langle\boldsymbol{q}|T_\pm(E_q+iO)|\boldsymbol{q}\rangle\left(\frac{E_q}{3}-2\beta\frac{q^2{}_\mu q^2{}_\nu}{m^2}\right)\left[\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\right].$$

Wenn wir noch $q_\nu^2 q_\mu^2$ über den Raumwinkel mitteln, ist die entsprechende Strömungskorrektur

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{(2)} = -2^{3/2}\lambda^3\beta^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\left(\frac{1}{3}E_q-\frac{2}{15}\beta E_q^2\right)e^{-\beta E_q}\,\mathrm{Re}\langle\boldsymbol{q}|T_\pm(E_q+iO)|\boldsymbol{q}\rangle. \tag{53}$$

Nun muß

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{\delta}+\Delta_{\mathrm{S}}^{(2)} \equiv \Delta_{\mathrm{S}}(\text{Landau}) \tag{54}$$

gerade dasjenige Δ_{S} sein, welches aus der unkorrigierten Landau-Gleichung folgt. In der Tat stellt man auch Übereinstimmung mit dem Ergebnis in [5] fest; allerdings ist dort noch ein Fehler zu verbessern[6], der leider auch von BAUMGARTL[7] bei numerischen Rechnungen übersehen wurde. Durch $B_1(T)$ kann man $\Delta_{\mathrm{S}}(\text{Landau})$ so ausdrücken:

$$\Delta_{\mathrm{S}}(\text{Landau}) = \frac{4}{15}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}B_1(T)\right). \tag{55}$$

Der dritte Term auf der rechten Seite von (37) lautet in zweiter Ordnung in der Dichte, wenn man $\nu \neq \mu$ und die Eigenschaft der Rotationsinvarianz (50) beachtet:

$$P_{\nu\mu}^{(3)} = \tau n^2\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\exp\left\{-\frac{\beta}{m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-m\boldsymbol{u}\right)^2\right\}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}\frac{\boldsymbol{k}}{m}$$
$$\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\frac{\beta}{2m}\left[\left(\frac{Q}{2}-m\boldsymbol{u}+\boldsymbol{k}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-m\boldsymbol{u}-\boldsymbol{k}\right)^2\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\frac{q_\nu q_\mu}{m}\,\frac{\mathscr{P}}{E_k-E_q}\,|\langle\boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2-\frac{k_\nu k_\mu}{m}\,\mathrm{Re}\langle\boldsymbol{k}|T_\pm'(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle\right\}$$

[6] Der in Abschnitt III von [5] angegebene Ausdruck $\Pi_{\nu\mu}$ ist — anders als dort behauptet wird — ungleich Null. Das Ergebnis $\Delta_{\mathrm{S}}^{\eta}$ in [5] ist deshalb erst nach Multiplikation mit 2 richtig.

[7] B. J. BAUMGARTL, Phys. Rev. **168**, 200 [1968].

$$= -2^{5/2}\,\tau\, n^2 \lambda^3 \beta \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \frac{q_\nu q_\mu}{m} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \frac{k_\varrho k_\sigma}{m} \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 \right.$$
$$\left. - \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \frac{k_\nu k_\mu}{m} \frac{k_\varrho k_\sigma}{m} \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle \right\}.$$

Die geschweifte Klammer ist $\sim (\delta_{\mu\varrho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\varrho})$. Man kann also $P^{(3)}_{\nu\mu}$ auf die gewünschte Form bringen und erhält als die zugehörige Strömungskorrektur

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{(3)} = 2^{5/2} \lambda^3 \beta^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \left\{ \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \left\langle \frac{q_\mu k_\mu}{m} \frac{q_\nu k_\nu}{m} \right\rangle_\omega \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 \right. \tag{56}$$
$$\left. - \frac{1}{15} E_k^2 \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) \boldsymbol{k}\rangle \right\}.$$

Jetzt ist noch zu ermitteln, was der letzte Anteil von $P_{\nu\mu}$ zu Δ_{s} beiträgt. Unter Zuhilfenahme von (8) bekommt man zunächst

$$P^{(4)}_{\nu\mu} = -\tau \pi n^2 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q} \exp\left\{ -\frac{\beta}{m} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u}\right)^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \left(\frac{\boldsymbol{k}}{m} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}\right) \left[\frac{\beta}{m} \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - m\boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{k} \right] \right.$$
$$\left. \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, q_\nu\, \delta(E_k - E_q) \operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* \partial_{q_\mu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle]. \right.$$

Mit (50) ergibt dann die weitere Rechnung, daß diese Größe praktisch schon bekannt ist, nämlich [s. (52)]

$$P^{(4)}_{\nu\mu} = P^{K_3}_{\nu\mu}.$$

Abschließend fassen wir unsere Ergebnisse für die durch (40) definierte Strömungskorrektur Δ_{s} noch einmal zusammen.

$$\Delta_{\mathrm{s}} = B_0(T) + \frac{4}{15} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \left(T^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} B_1(T) \right) + B_2(T)$$
$$+ 2^{5/2} \lambda^3 \beta^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \left\{ \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q} \left\langle \frac{q_\mu k_\mu}{m} \frac{q_\nu k_\nu}{m} \right\rangle_\omega \frac{\mathscr{P}'}{E_k - E_q} |\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle|^2 \right. \tag{57}$$
$$\left. - \frac{1}{15} E_k^2 \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{k} | T'_\pm(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle \right\}$$
$$- 2^{5/2} \lambda^3 \beta^2 \pi \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \delta(E_q - E_k) \left\langle \frac{q_\mu k_\mu}{m} \operatorname{Im}[\langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle^* q_\nu \partial_{k_\nu} \langle \boldsymbol{q} | T_\pm(E_q + i\,O) | \boldsymbol{k}\rangle] \right\rangle_\omega.$$

5. Stoßkorrektur und mittlere freie Flugzeit

Es wird sinnvoll sein, die in (33) eingeführte Relaxationszeit als

$$\tau = c\,\vartheta \tag{58}$$

anzusetzen, wobei c eine Konstante von der Größenordnung eins sein soll und ϑ die mittlere freie Flugzeit, die wir noch genauer diskutieren wollen.

Bei der Dichteentwicklung für η ist natürlich auch die Dichteabhängigkeit von τ zu berücksichtigen. Geht man von der Stoßfrequenz

$$\nu = \vartheta^{-1} = n\,\nu_1 + n^2 \nu_2 + \cdots \tag{59}$$

aus, so folgt mit

$$(\tau n)_{n=0} \equiv c/\nu_1, \quad \Delta_c = -\nu_2/\nu_1 \tag{60}$$

die Entwicklung

$$\tau n = (\tau n)_{n=0}(1 + n\,\Delta_c + \cdots). \tag{61}$$

Der zweite Virialkoeffizient für die Zähigkeit ist dann die Summe von Δ_{s} und Δ_c.

Dem Boltzmannschen Stoßintegral entspricht die Stoßfrequenz

$$\nu_B(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{n(\boldsymbol{r}, t)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}'\, \frac{4}{m^2}\, \sigma\left(\left| \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}}{2} \right| ; \vartheta \right) \delta\, (E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})/2} - E_{(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')/2})$$
$$\delta(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}') f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}; t) f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}; t) \tag{62}$$

[s. auch (15)[1]].

Für den Fall des lokalen Gleichgewichtes folgt hieraus

$$\nu_1(\boldsymbol{r}, t) = 2^{3/2}(2\pi m \varkappa T(\boldsymbol{r}, t))^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, e^{-\beta(\boldsymbol{r},t)E_p} \frac{p}{\frac{1}{2}m} \sigma_{\mathrm{tot}}(p). \tag{63}$$

Abgesehen von $T = T(\boldsymbol{r}, t)$ ist ν_1 im lokalen Gleichgewicht mit ν_1 im totalen Gleichgewicht identisch. Dasselbe gilt für das aus (62) folgende ν_2. Man findet es zusammen mit einer zusätzlichen Korrektur schon bei GROSSMANN.

Wir wollen nun jedoch von einem möglichst allgemeinen Ausdruck für die Stoßfrequenz ausgehen. Der Kadanoff-Baymschen Bewegungsgleichung (25)[1] entsprechend ist Teilchen mit $\boldsymbol{p}$, E an der Stelle $\boldsymbol{r}$ zur Zeit t die Stoßfrequenz

$$2\pi(2\pi\hbar)^3 \sigma^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t)$$

zuzuschreiben. Nach Mittelung über $\boldsymbol{p}$ und E:

$$\nu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{2\pi(2\pi\hbar)^3}{n(\boldsymbol{r}, t)} \int \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \sigma^{>}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t) g^{<}(\boldsymbol{p}E, \boldsymbol{r}t). \tag{64}$$

Diese Größe wird jetzt in $\mathscr{T}$-Näherung[1] weiter ausgewertet. Für ν_1 gilt auch hier wieder (63). Bei ν_2 beschränken wir uns zur Vereinfachung der Rechnungen von vornherein auf das totale Gleichgewicht. Nach (84)[1] ist dann

$$\begin{aligned}\nu = {} & \frac{2\pi(2\pi\hbar)^3}{n} \int \frac{\mathrm{d}E\, \mathrm{d}E'}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, g^{<}(p, E) g^{<}(p', E') \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, e^{(i/\hbar)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q}} \\ & \cdot \left\{ \left\langle \boldsymbol{p} + \tfrac{\boldsymbol{q}}{2}\, \boldsymbol{p}' \right| T^{>}(E + E') \left| \boldsymbol{p} - \tfrac{\boldsymbol{q}}{2}, \boldsymbol{p}' \right\rangle \pm \left\langle \boldsymbol{p} + \tfrac{\boldsymbol{q}}{2}, \boldsymbol{p}' \right| T^{>}(E + E') \left| \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p} - \tfrac{\boldsymbol{q}}{2} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \tag{65}$$

Hier gehen wir mit dem optischen Theorem (78)[1] für $T^{>}$ ein, wobei wir noch die Eigenschaft

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \mathscr{T}(t, z) | \boldsymbol{p}_1' \boldsymbol{p}_2' \rangle_{\mathrm{eq}} = \delta(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}') \langle \boldsymbol{p} | \mathscr{T}(z, \boldsymbol{P}) | \boldsymbol{p}' \rangle \tag{66}$$

der $\mathscr{T}$-Matrix im Gleichgewicht benutzen:

$$\begin{aligned}\nu = {} & \frac{1}{n} \frac{\pi}{\hbar} (2\pi\hbar)^9 \int \mathrm{d}E\, \mathrm{d}E'\, \mathrm{d}E_1\, \mathrm{d}E_2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, \delta(E_1 + E_2 - E - E') g^{<}(p, E) g^{<}(p', E') \\ & \cdot g^{>}\left(\frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'}{2} + \boldsymbol{k}, E_1\right) g^{>}\left(\frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'}{2} - \boldsymbol{k}, E_2\right) \left\langle \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{2} \right| \mathscr{T}_{\pm}(E + E' + i\,O, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}') \left| \boldsymbol{k} \right\rangle \\ & \cdot \left\langle \boldsymbol{k} \right| \mathscr{T}_{\pm}(E + E' - i\,O, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}') \left| \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{2} \right\rangle. \end{aligned} \tag{67}$$

Hier ist jetzt die Dichteentwicklung vorzunehmen. Mit $g^{>} = (2\pi\hbar)^{-3} a \pm g^{<}$, sowie den Dichteentwicklungen für $g^{<}$, a und die $\mathscr{T}$-Matrix (s. [1]) bekommen wir:

$$\nu_2 = \nu_2^{(1)} + \nu_2^{(2)} + \nu_2^{(3)}, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\nu_2^{(1)} = {} & \frac{2\pi}{\hbar} \lambda^3 \int \mathrm{d}E' \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta(p^2/2m)} \delta\left(E_k - E_{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')/2} + \frac{p'^2}{2m} - E'\right) \\ & \cdot [h_2(p', E') - h_1(p', E')(2\pi m \varkappa T^{-3/2} \int \mathrm{d}E''\, \mathrm{d}\boldsymbol{p}''\, e^{-\beta E''} \alpha(p'', E'')] \cdot \left| \left\langle \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{2} \right| T_{\pm}(E_k + i\,O) \left| \boldsymbol{k} \right\rangle \right|^2, \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\nu_2^{(2)} = {} & \pm \frac{2\pi}{\hbar} \lambda^6 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, e^{-\beta Q^2/4m} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_k} \exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2} - \boldsymbol{k}\right)^2\right\} \\ & \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \delta(E_k - E_q) \left| \langle \boldsymbol{q} | T_{\pm}(E_q + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle \right|^2, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\nu_2^{(3)} = {} & \frac{\pi}{\hbar} \lambda^3 (2\pi m \varkappa T)^{-3/2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, e^{-\beta(Q^2/4m)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{-\beta E_q} \delta(E_k - E_q) \\ & \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \left\langle \boldsymbol{q} \right| \mathscr{T}_{1,\pm}\left(E_k + \frac{Q^2}{4m} + i\,O, \boldsymbol{Q}\right) \left| \boldsymbol{k} \right\rangle \langle \boldsymbol{k} | T_{\pm}(E_k - i\,O) | \boldsymbol{q} \rangle \right. \\ & \left. + \langle \boldsymbol{q} | T_{\pm}(E_k + i\,O) | \boldsymbol{k} \rangle \left\langle \boldsymbol{k} \right| \mathscr{T}_{1,\pm}\left(E_k + \frac{Q^2}{4m} - i\,O, \boldsymbol{Q}\right) \left| \boldsymbol{q} \right\rangle \right\}_{n=0}. \end{aligned} \tag{71}$$

Die Funktionen h_1, h_2, α sind aus [1] bekannt. $\langle \boldsymbol{p} | \mathscr{T}_1(z), P) | \boldsymbol{p}' \rangle$ ist gemäß (66) mit $\langle \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_2 | \mathscr{T}_1(t, z) | \boldsymbol{p}'_1 \boldsymbol{p}'_2 \rangle$, bestimmt durch die Integralgleichung (77)[1], verknüpft.

$\nu_2^{(1)}$ rechnen wir weiter aus, indem wir h_1, h_2 einsetzen [(40)[1], (41)[1]] und außerdem (97)[1] anwenden.

$$\begin{aligned}\nu_2^{(1)} &= 4\,B(T)\cdot \nu_1 \pm \frac{2\pi}{\hbar}\,\lambda^6\,(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right)^2 e^{-\beta E_q}\right.\\ &\qquad\cdot\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_k-E_q)\,|\langle \boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2\\ &\quad+\frac{2\pi}{\hbar}\,\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}|\langle \boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2\\ &\qquad\cdot\alpha\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q},\,E_k-E_q+\frac{1}{2m}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right]^2\right).\end{aligned}$$

Der zweite Summand von $\nu_2^{(1)}$ stimmt jetzt mit $\nu_2^{(2)}$ überein. Mit

$$(2\pi\hbar)^3\,\frac{\pi}{\hbar}\int \mathrm{d}\boldsymbol{p}'\,\delta(E_p-E_{p'})\,|\langle \boldsymbol{p}|T_\pm(E_p+iO)|\boldsymbol{p}'\rangle|^2=\frac{p}{\frac{1}{2}m}\,\sigma_{\mathrm{tot}}(p)$$

wird dann

$$\begin{aligned}\nu_2^{(1)}+\nu_2^{(2)} &= 4\,B(T)\,\nu_1 \pm 4\,\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\exp\left\{-\beta\left(E_q+\frac{1}{2m}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right]^2\right)\right\}\frac{q}{\frac{1}{2}m}\,\sigma_{\mathrm{tot}}(q)\\ &\quad+\frac{2\pi}{\hbar}\,\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}|\langle \boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2\\ &\qquad\alpha\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q},\,E_k-E_q+\frac{1}{2m}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right]^2\right).\end{aligned}$$

Jetzt bleibt noch einzusetzen [vgl. (92)[1]]:

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q},\,E_k-E_q+\frac{1}{2m}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right]^2\right)\\ &\quad=-\lambda^3\,\delta'(E_k-E_q)\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}'\,e^{-\beta q'^2/2m}\,\mathrm{Re}\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T_\pm(E_k-E_q+E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}+iO)\left|\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right\rangle\\ &-\tfrac{1}{2}\lambda^3\,\frac{\mathscr{P}'}{E_k-E_q}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}'\,e^{-\beta q'^2/2m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}'\,\delta(E_k-E_q+E_{(\boldsymbol{Q}/4-(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'/2)}-E_{k'})\left|\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T_\pm(E_{k'}+iO)|\boldsymbol{k}'\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Wir gelangen dann zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}\nu_2 &= \nu_2^{(3)}+4\,B(T)\,\nu_1\pm 4\,\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\exp\left\{-\beta\left(E_q+\frac{1}{2m}\left[\frac{\boldsymbol{Q}}{2}-\boldsymbol{q}\right]^2\right\}\frac{q}{\frac{1}{2}m}\,\sigma_{\mathrm{tot}}(q)\right.\\ &\quad+2\,\lambda^3(2\pi m\varkappa T)^{-3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}'\,e^{-\beta(E_q+q'^2/2m)}\,\frac{q}{\frac{1}{2}m}\,\sigma_{\mathrm{tot}}(q)\\ &\quad\cdot\mathrm{Re}\left\{\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T'_\pm(E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}+iO)\left|\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right\rangle\right.\\ &\qquad\left.-\beta\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T_\pm(E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}+iO)\left|\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right\rangle\right\}\\ &\quad+2\,\frac{\pi}{\hbar}\,\lambda^6(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}'\exp\left\{-\beta\left(E_q+\frac{q'^2}{2m}\right)\right\}\\ &\quad\cdot\mathrm{Re}\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T_\pm(E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}+iO)\left|\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right\rangle\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\delta(E_k-E_q)\,\partial_{E_k}|\langle \boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2\\ &\quad-2\,\frac{\pi}{\hbar}\,\lambda^6(2\pi m\varkappa T)^{-3/2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\,e^{-\beta Q^2/4m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,e^{-\beta E_k}|\langle \boldsymbol{q}|T_\pm(E_k+iO)|\boldsymbol{k}\rangle|^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}'\exp\left\{-\beta\,\frac{q'^2}{2m}\right\}\\ &\quad\cdot\tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}'\,\delta(E_k-E_q-[E_{k'}-E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}])\,\frac{\mathscr{P}'}{E_{k'}-E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}}\\ &\qquad\left|\left\langle\frac{\boldsymbol{Q}}{4}-\frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2}\right|T_\pm(E_{k'}+iO)|\boldsymbol{k}'\rangle\right|^2.\end{aligned}\tag{72}$$

Ersetzt man hier im letzten Term

$$\delta(E_k-E_q-[E_{k'}-E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)}])\quad\text{durch}\quad\delta(E_k-E_q),$$

so fällt er gegen den in (72) schon vorkommenden Ausdruck

$$2\lambda^3 (2\pi m \varkappa T)^{-3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, e^{-\beta Q^2/4m} \int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}' \exp\left\{-\beta\left(E_q + \frac{q'^2}{2m}\right)\right\} \frac{q}{\frac{1}{2}m}\, \sigma_{\mathrm{tot}}(q)$$
$$\cdot \operatorname{Re}\left\langle \frac{\boldsymbol{Q}}{4} - \frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2} \,\middle|\, T_{\pm}(E_{(\boldsymbol{Q}/4-[\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}']/2)} + i\,O) \,\middle|\, \frac{\boldsymbol{Q}}{4} - \frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'}{2} \right\rangle$$

wegen (88)[1] weg.

Allgemein ist zu sagen, daß die strengen Ergebnisse der Paragraphen 4 und 5 wahrscheinlich teilweise noch umgearbeitet bzw. durch Näherungen vereinfacht werden müssen (vgl. dazu auch [5]), um numerische Rechnungen zu erleichtern. Dies gilt insbesondere für die Größe $\nu_2^{(3)}$ nach (71), für die man wegen $\mathscr{T}_1$ erst noch die entsprechende Integralgleichung zu lösen hätte.

Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. S. GROSSMANN für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit sehr zu Dank verpflichtet.